

# 非饱和土的弹塑性模型研究

王志玲<sup>1</sup>, 张印杰<sup>2</sup>, 彭 劼<sup>1</sup>

(1. 河海大学 岩土所, 江苏 南京 210098; 2. 郑州大学 土木工程学院, 河南 郑州 450002)

**摘 要:** 从孔隙水的存在状态出发,探讨了非饱和土的有效应力原理。利用非饱和土的有效应力原理,将饱和土的弹塑性模型推广到了非饱和土中,建立了能反映非饱和土渐近性破坏、湿陷湿胀等特性的剑桥修正模型。该模型中新引入的试验参数较少,确定时只需要水分特征曲线,其它可以利用饱和土的成果,能在工程实际中采用。

**关 键 词:** 非饱和土; 有效应力; 吸力; 毛细水应力; 重力水应力

**中图分类号:** TU 41 **文献标识码:** A

## Study on elastoplastic model of unsaturated soil

WANG Zhi-ling<sup>1</sup>, ZHANG Yin-jie<sup>2</sup>, PENG Jie<sup>1</sup>

(1. Research Institute of Geotechnical Engineering Hohai University Nanjing 210098, China;  
2. College of Civil Engineering Zhengzhou University Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** Based on the existent status of pore water pressure, by using the effective stress principle of unsaturated soil, the extension of elastoplastic model of saturated soil to unsaturated soil is carried out, a modified Cam model which can account for unsaturated soil's gradually collapse and collapsibility is established. The model has few parameters and can get them from water characteristic curve and saturated soil's test, it is applicable in practice.

**Key words:** unsaturated soil; effective stress; suction; capillary stress; gravity water stress

## 1 引 言

众所周知,在饱和土中支配强度和变形的应力是有效应力,有效应力的表达式为

$$\sigma' = \sigma - u_w \quad (1)$$

式中  $\sigma$  为总应力;  $u_w$  为孔隙水压力。Bishop(1960 年)考虑到非饱和土的破坏与饱和土不同是因为吸力的影响,提出非饱和土的有效应力表达式为

$$\sigma' = \sigma - u_a + \chi s \quad (2)$$

$$s = u_a - u_w \quad (3)$$

式中  $u_a$  为孔隙气压力;  $s$  为吸力;  $\chi$  为单位面积土模型中水压力作用的面积,对于饱和土  $\chi = 1$ ; 对于干土  $\chi = 0$ 。但仅凭式(2)、(3)的概念并不能说明非饱和土特有的力学性质,如  $\chi$  依赖于问题的性质(强度或变形)、饱和路径(吸水或脱水)和浸水湿陷等。这给利用饱和土的有关理论公式建立非饱和土的本构模型带来了极大的困难。为解决这个问题,向后<sup>[1]</sup>(1993 年)根据非饱和土中水分的保存状态,提出吸力有两种不

同的作用效果:① 使有效应力增加;② 使屈服应力及与塑性变形相反的土骨架的刚性增大。本文以此为基础,探讨了非饱和土的有效应力原理,并将饱和土的剑桥修正模型推广到非饱和土中。

## 2 非饱和土中孔隙水的存在状态与吸力作用效果

在非饱和土中,孔隙水有 3 种存在状态:① 吸附在土颗粒表面的结合水,因所占的含水量一般不变,可视为土颗粒的一部分;② 包围在土颗粒接触点周围形成弯液面的自由水(以下称毛细水),因在孔隙内非连续存在,所以只影响两土颗粒接触点间的作用力;③ 充满土孔隙的自由水(以下称重力水),因在孔隙内连续存在,所以与土骨架、孔隙气一起分担传递作用于土界面上的垂直总应力。

为弄清孔隙水的存在状态与吸力作用效果的关系,考察图 1 所示的三粒结构土模型。当土孔隙内只含毛细水时(如图 1(a)所示),对 1 号土颗粒,由吸力

收稿日期:2001-06-18

作者简介:王志玲,女,1962 年生,工程师,博士生,主要从事岩土工程方面的研究。

产生的粒间压力分别作用于 1 号土颗粒与其它两个土颗粒接触面的垂直方向, 仅有抑制土颗粒滑动的作用(土颗粒的滑动遵从摩擦准则)。塑性变形是由土颗粒间的滑动产生的, 故毛细水作用面积上的吸力有抑制塑性变形的作用(即向后提出的吸力效果②)。当土孔隙内充满重力水时(本文中假定含重力水的孔隙均不含毛细水, 如图 1(b)所示), 吸力在孔隙内连续存在, 对 1 号土颗粒, 由吸力产生的压缩力  $f_1$  作用于连接该土颗粒左右弯液面连线的垂直方向, 与有效应力有相同的作用: 一方面引起土体的压缩, 另一方面提高土骨架的刚度(即向后提出的吸力作用效果①)。

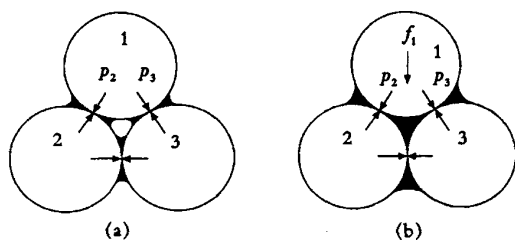


图 1 孔隙水的存在状态与吸水效果  
Fig.1 The existing state of pore water and the effect of suction pressure

### 3 非饱和土的有效应力原理

为探明非饱和土的有效应力原理, 考察图 2 所示的假想的单粒结构非饱和土块模型。图 2(a) 为土骨架单元, 设土骨架间的传递力  $P'$  的作用线通过土颗粒接触点与相邻两土颗粒中心连线组成的倾角为  $\theta$ , 如果  $\theta$  小于土颗粒间的摩擦角  $\phi_u$ , 则认为这个土骨架单元对  $P'$  是稳定的(即土颗粒若是刚性的, 无论  $P'$  有多大, 土骨架也不会发生滑移; 土颗粒若是弹性的,  $\theta$  随  $P'$  的增加而增加, 当  $\theta$  大于  $\phi_u$  时土颗粒发生滑移, 土骨架屈服)。图 2(b) 为并列四排土骨架单元组成的非饱和土块模型, 其中单元的第二列两侧均为空气, 土颗粒接触点存在毛细水, 第四列两侧均为重力水, 土颗粒接触点不存在毛细水; 第一、三列在空气一侧的土颗粒接触点存在毛细水。定义

$$\frac{\sum P}{A} = p = p_T - u_s \quad (4)$$

式中  $A$  为土块的面积;  $p$  为净应力;  $p_T$  为作用于土体界面上的平均总应力。

取波形断面 X-X, 如图 2(b) 所示, 由于  $u_a \neq u_w$ , 所以在毛细水和重力水作用的面积上存在吸力  $s$  (为方便, 以下将作用于毛细水面积上的吸力称为毛细水应力, 用  $p_m$  表示, 作用于重力水面积上的吸力称为重力水应力, 用  $p_b$  表示), 另外该断面上还存在  $P'$  和  $N$

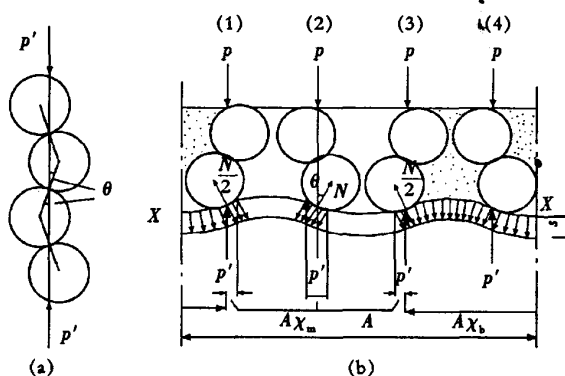


图 2 假想的非饱和土体模型  
Fig.2 Hypothetical clod model of unsaturated soil

( $N$  是为平衡各土颗粒接触点处的毛细水应力而产生的)。根据图 2(b) 中各力的平衡关系可得

$$\frac{\sum P' + \sum N'}{A} = p + \chi_b s + \chi_m s = p + p_b + p_m \quad (5)$$

式中  $N' = N \cos \theta$ ;  $\chi_b$  和  $\chi_m$  分别为单位面积土模型中重力水和毛细水所占的面积。

由于  $\sum N' - A \chi_m = 0$ , 代入式(5)可得

$$\frac{\sum P'}{A} = p' = p + \chi_b s \quad (6)$$

在非饱和土中引起土体压缩的应力为式(6), 抵抗土体变形的应力为式(5)。毛细水应力一般不影响实际中非饱和土开始发生破坏的强度, 原因很容易理解, 当土的饱和度较高时, 很多孔隙充满了重力水, 土颗粒接触点没有毛细水应力; 当土的饱和度较低时, 很多孔隙充满了空气, 土颗粒接触点也没有毛细水应力, 土体往往从这些点开始破坏, 进而使破坏区逐渐扩大。因此, 虽然式(5)表示作用于非饱和土块断面上的平均应力, 但若考虑长期稳定问题, 支配非饱和土强度的应力为式(6)而非式(5)。

### 4 $\chi_b$ 和 $\chi_m$ 的确定方法

为确定  $\chi_b$  和  $\chi_m$ , 轻部大藏<sup>[2]</sup>提出了最干燥水分曲线的概念和求解方法。所谓最干燥水分曲线即描述试样失去重力水状态时的水分特征曲线, 从理论上讲它可以用吸力从无穷大开始, 逐渐减小吸力所得到的实测吸水曲线表示。将饱和的试样装入非饱和试验用的三轴仪中, 逐级施加空气压力测定排水量和体积变化即可得脱水曲线(空气开始进入土孔隙所对应的吸力叫空气入侵值  $s_a$ ); 然后逐级减小空气压力测定吸水量和体积变化即可得吸水曲线(水突然急剧侵入土孔隙所对应的吸力叫水入侵值  $s_w$ )。当吸力小于该土料的空气入侵值  $s_a$  时, 相邻土颗粒接触点的毛细水相

连转为重力水的机会增加,最干燥水分曲线由实测的吸水曲线向下偏离,不能再实测的吸水曲线表示。轻部大藏提出:①把实测的脱水曲线外延到 $s \sim \infty$ ,得到结合水所占的饱和度 $S_{ro}$ ,在吸力大于空气入侵值 $s_A$ 的范围内,最干燥水分曲线用从 $S_{ro}$ 开始的实测吸水曲线表示;②在吸力介于空气入侵值 $s_A$ 和水入侵值 $s_w$ 之间时,最干燥水分曲线用①的吸水曲线在空气入侵值处的切线表示。因此要获得最干燥水分曲线,必须有吸水曲线和脱水曲线。

实测的脱水曲线和吸水曲线可用 Brooks 和 Corey<sup>[2]</sup>提出的经验公式近似地表示为

$$(1) \text{ 脱水曲线 } S_e = \frac{S_r - S_{ro}}{100 - S_{ro}} = \left(\frac{s}{s_A}\right)^{\alpha} \quad (7)$$

$$(2) \text{ 吸水曲线 } S_e = \frac{S_r - S'_{ro}}{100 - S'_{ro}} = \left(\frac{s_w}{s}\right)^{\beta} \quad (8)$$

式中  $S_e$  为用中间项定义的相对饱和度; $S_{ro}, S'_{ro}$  分别为脱水曲线、吸水曲线上的残余饱和度; $\alpha, \beta$  分别为反映脱水曲线、吸水曲线的形状指数。

最干燥水分曲线可表示为

$$s \geq s_A \quad S_e = \frac{S_r - S_{ro}}{100 - S_{ro}} = \left(\frac{s_w}{s}\right)^{\beta} \quad (9)$$

$$s_w < s < s_A \quad S_e = \left(\frac{s_w}{s_A}\right)^{\beta} \left\{ -\beta \left(\frac{s}{s_A}\right) + (1 + \beta) \right\} \quad (10)$$

图3中的虚线为实测的脱水和吸水曲线<sup>[2]</sup>,细实线为用式(7)和式(8)表示的脱水和吸水曲线,粗实线为用式(9)和式(10)表示的最干燥水分曲线。

有了最干燥水分曲线,可求得饱和度为 $S_r$  ( $S_r = S_{ro} + S_{rb} + S_{rm}$ ),吸力为 $s$ 的土料重力水、毛细水各占的饱和度为

$$(1) \text{ 重力水 } S_{rb} = \frac{(100 - S_{ro})(S_r - S_{rd})}{100 - S_{rd}} \quad (11)$$

$$(2) \text{ 毛细水 } S_{rm} = S_r - S_{ro} - S_{rb} = \frac{(100 - S_r)(S_{rd} - S_{ro})}{100 - S_{rd}} \quad (12)$$

式中  $S_{rd}$  为吸力 $s$ 对应在最干燥水分曲线上的纵坐标。

$$\chi_b = \frac{S_{rb}}{100 - S_{ro}} = \frac{S_r - S_{rd}}{100 - S_{rd}} \quad (13)$$

$$\chi_m = \frac{S_{rm}}{100 - S_{ro}} = \frac{(100 - S_r)(S_{rd} - S_{ro})}{(100 - S_{ro})(100 - S_{rd})} \quad (14)$$

$$\chi = \chi_m + \chi_b = \frac{S_r - S_{ro}}{100 - S_{ro}} \quad (15)$$

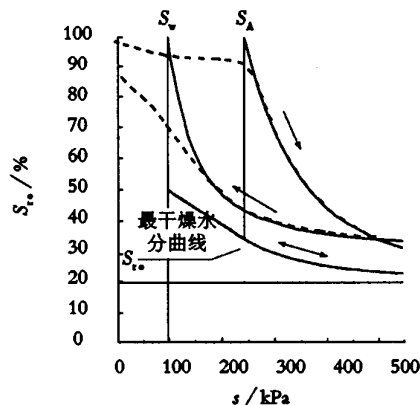


图3 最干燥水分曲线  
Fig.3 Driest moisture curve

## 5 非饱和土的剑桥修正模型

利用非饱和土的有效应力原理,可将适合饱和土的弹塑性模型推广到非饱和土中。下面以剑桥修正模型为例说明推广方法。

在非饱和土中,有效应力采用式(6)计算,重力水应力的作用便自动地导入模型中。非饱和土的临界状态方程仍可用饱和土在三轴状态下的不变量( $p', q$ )来描述

$$q = Mp' \quad (16)$$

式中  $M$  为饱和土临界状态线的斜率,这里考虑非饱和土的渐近性破坏特性,所以 $p'$ 用式(6)计算。

饱和土在弹塑性范围内的体积变化可用正常固结线表示为

$$e = e_1 - \lambda(\ln p' - \ln p'_1) \quad (17)$$

式中  $p'_1$  为任意基准的平均有效应力(大于初始屈服应力); $e_1$  为对应于 $p'_1$ 的孔隙比; $\lambda$  为饱和状态下的压缩指数。向后的试验结果表明<sup>[3]</sup>,非饱和土在弹塑性范围内的体积变化也可用正常固结线表示:

$$e = e_1 - \lambda^*(\ln p' - \ln p'_1) \quad (18)$$

式中  $\lambda^*$  为非饱和土状态(设加荷固结前饱和度为 $S_r$ ,作用吸力为 $s$ )下的压缩指数,可根据饱和固结试验及吸排水过程中的水分特征曲线用加藤提出的非饱和土等向固结变形理论求出。

①根据饱和固结试验求出压缩指数 $\lambda$ 、膨胀指数 $\kappa$ 及初始屈服应力 $p'_{y0}$ ,由于毛细水应力只影响塑性变形,所以饱和状态与非饱和状态的膨胀指数相同;②根据水分特征曲线求出最干燥水分曲线,用式(11)和(12)求出加荷固结前的应力状态 $O(S_r, s)$ 对应应在 $p'-$

$p'_m$  面上的应力分量 ( $p'_0 = p_{b0}, p_{m0}$ ); 计算出初始屈服应力  $p'_y = p'_{y0} + p_{b0} + p_{m0}$ ; ③如果试样的作用吸力不大于水入侵值,  $\lambda^* = \lambda$ 。如果试样的作用吸力大于水入侵值, 固结过程(保持吸力恒定)中应力状态由  $O(p'_0, p_{m0})$  移到任一点  $B(p', p_m)$  时, 对应的孔隙比  $e_B$  可用下式<sup>[4]</sup>计算

$$e_B = e_0 - C_s \lg \frac{p' + p_m}{p'_0 + p_{m0}} - C_c \lg \frac{p' + p_m}{p'_y + p_{m0}} \quad (19)$$

式中  $p'_0 = p_{b0}$ ;  $C_s = 2.303\kappa$ ;  $C_c = 2.303\lambda$ ;  $p' > p'_y$ ;  $e_0$  为  $O$  点对应的孔隙比。由于固结过程中饱和度会发生变化, 所以上式中的  $p_m$  是未知的, 不妨先假设  $p_m = p_{m0}$  计算出  $e_B$  作为已知量。轻部和向后的试验结果都表明, 荷载压力不能使毛细水排出, 所以当作用吸力大于空气入侵值时, 试样在固结过程中含水量不发生变化, 根据土体指标间的换算公式可求出  $B$  点对应的饱和度  $S_{wb}$ ; 当作用吸力处于水入侵值和空气入侵值之间时, 含重力水的孔隙因土骨架压缩可能会发生排水, 为求出排水量, 先求出  $O$  状态对应的重力水饱和度分量  $S_{wb}$  (重力水是占满孔隙的水, 由  $S_{wb}$  可求出重力水占据的孔隙体积与土粒体积的比例  $e_b$ ) 及毛细水和结合水的饱和度  $S_{wb}$ , 假定土孔隙的压缩是均匀的, 则  $e_b : e_0 = e_{bb} : e_B$ , 据此可求出  $B$  状态重力水占据的孔隙占土粒体积的比例  $e_{bb}$ , 从而求出重力水含水量, 结合水和毛细水含水量不变, 故可求出  $B$  状态对应的含水量及饱和度  $S_{wb}$ 。根据  $S_{wb}$  可反算出  $p_m$ , 将反算出的  $p_m$  与假设值比较, 若不相等, 再用反算出的  $p_m$  作为假设值代入式 (19), 重复以上过程, 直至  $p_m$  的假设值与计算值相等, 试算结束。这样分级计算出  $p'$  及对应的孔隙比  $e$ , 画出  $e - \ln p'$  关系曲线, 便可求得  $\lambda^*$ 。

非饱和土的塑性变形可表示为

$$\epsilon_v^p = \frac{\lambda^* - \kappa}{1 + e_0} (\ln p' - \ln p'_y) \quad (20)$$

剑桥模型的屈服方程为

$$M^2 \left( p' - \frac{p_c}{2} \right)^2 + q^2 - \frac{M^2}{4} (p'_c)^2 = 0 \quad (21)$$

式中  $p'_c$  为压缩屈服应力, 根据式 (20) 可得

$$p'_c = p'_y \exp \left[ \frac{1 + e_0}{\lambda^* - \kappa} \epsilon_v^p \right] \quad (22)$$

这样毛细水应力对屈服应力的影响便通过  $\lambda^*$  导入了模型中。

图 4 描述了吸力增减对非饱和土变形特性的影响。图 4(a) 中的  $AB$  线为饱和土的正常固结线,  $CD$  线

为非饱和土(初始饱和度为  $S_r$ , 对应的吸力为  $s$ ) 的固结线,  $C, B, D$  对应的屈服面如图 4(b) 所示,  $B, D$  两点对应的有效应力相同, 但  $D$  点处于  $CD$  线上, 由于毛细水应力的影响使屈服面大于  $B$  点的屈服面。若在  $D$  处浸水使土样饱和,  $D$  点可能移至  $E$  点, 由此产生的体积变化  $\Delta e_1$  即为湿陷;  $D$  点可能移至  $F$  点, 由此产生的体积变化  $\Delta e_2$  即为湿胀。

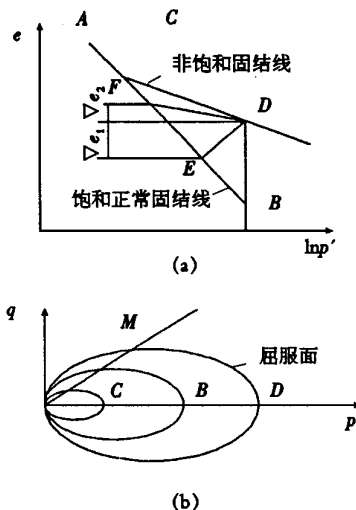


图 4 吸力变化对变形特性的影响  
Fig. 4 The impact of the change of suction pressure on deformation characteristic

## 6 结 语

利用上述方法可将饱和土的任何弹塑性模型推广到非饱和土中。这种推广方法不但概念清楚, 而且得到的模型试验参数少, 除需要测定土料其脱水和吸水曲线外, 其它可以利用饱和土的成果。

## 参 考 文 献

- [1] 向后雄二. 不飽和土の三軸应力条件での力学的挙動に対する弾塑性論的解釋[J]. 農業土木学会論文集, 1997, (12): 47-57.
- [2] 轻部大藏. 不飽和土の間隙水の状态と土塊力学的挙動の关系について[J]. 土木学会論文集, 1996, (3): 83-92.
- [3] 向后雄二. 不飽和シルおよび砂粘土混合土の三軸应力条件下での体積变化およびせん断挙動, 農業土木学会論文集, 1998, (2): 35-49.
- [4] 加藤正司. 不飽和土の圧縮特性に及およぼす孔隙水分分布の影響に関する研究[J]. 土木学会論文集, 1996, (12): 57-69.